数理解析研究所講究録
440巻 1981年 36-52

虚の絶対Abel体のStickelberger idealの指数について

筑波大　数学系　木村　達雄
都立大　理学部　堀江　邦明

複素数体の部分体kで、有理数体$\mathbb{Q}$の有限次Abel拡大となっているものを絶対Abel体と呼び、kの単数群をE_kで、拡大$k/\mathbb{Q}$のGalois群を$G=G_k$で、Gの有理整数環$\mathbb{Z}$及び$\mathbb{Q}$の上の群環をそれぞれR_k, $\mathfrak{S}_k$で表す。

$$R_k := \mathbb{Z}[G] \subset \mathfrak{S}_k := \mathbb{Q}[G].$$

従来、絶対Abel体kに対しては、その類数h_kを表示するいわゆる解析的類数公式が知られているが、一方これをkの代数的不変量によって解釈し直す試みも行なわれている。その一つはKummerが円の素数分体の最大実部分体に対して行なった考察を押し広げた場合([H], [L], …)で、kが実、即ち実~~数体~~$\mathbb{R}$に含まれているとき、Leopoldt [L]の意味でのkの円単数群H_kを取れば

(1) $$Q_G \cdot h_k = [E_k : H_k]$$

が成立つというものである。但しQ_GはGの群構造のみで決

まる自然数で

(2) $$Q_G := \left(|G|^{|G|-2} / \prod_{\chi} d_\chi\right)^{1/2}.$$

ここで右辺$\prod_{\chi}$のχは、Abel群Gの指標χ達にχの位数g_χと素な整数aを取るならχとχ^aは同値として同値関係を定義したときの同値類の代表元を走る。又d_χは円のg_χ分体の判別式の絶対値である。この式から、h_kがほぼ指数$[E_k : H_k]$によって表示される、もっと正確に言うなら$|G| = [k : \mathbb{Q}]$と素な部分については両者の一致することが直ちに分るだろう。

次にkが虚、即ち$k \not\subset \mathbb{R}$なる場合には

$$k^+ := k \cap \mathbb{R}$$

とおくとき

$$h_k = h_{k^+} \cdot h_k^-, \qquad h_k^- \in \mathbb{N}$$

なる分解を得る。h_k^-はkのいわゆる相対類数である。先に述べた意味で

$$h_{k^+} \doteqdot [E_{k^+} : H_{k^+}]$$

であるが、これに対しh_k^-についてもSinnott [S-2] の意味でのkのStickelberger ideal S_kを取れば、

(3) $$h_k^- \doteqdot [A_k : S_k]$$

なる表示が可能となる。([Iw], [S-1], [S-2], …) 但しA_k, S_k共にR_kのidealでA_kはS_kを含み、JでGに属する複素共役写像を表すことにすれば

$$A_k := \{\alpha \in R_k \mid (1+J)\alpha \in \mathbb{Z}\sum_{\sigma \in G}\sigma\}.$$

(3)の右辺を[S-2]に従って、<u>k の Stickelberger ideal の指数</u>と呼ぶ。ここで我々は(1)での Q_G に相当して(3)を成立たせる

$$c_k \cdot h_k^- = [A_k : S_k]$$

なる $c_k \in \mathbb{Q}$ に興味をひかれる。

所で[S-2]とは別なやり方で、然し[S-2]から多くを享受しながら木村[K]の方法を押し進めて我々が得た主な成果は、$k/\mathbb{Q}$ で分岐する素数の総数 $g = g(k)$ を固定して、k を虚の絶対Abel体を走らせた時の c_k の値域の決定である。c_k の値に関するこのような問題設定には、いくつかの理由がある。それは、c_k に対しては Q_G に対する(2)のような簡明な表示が求められそうもないこと、岩沢[Iw]以来の c_k の標準的な計算手順が g に深く依存していること、k が円分体の場合には c_k は g のみに依る2巾の自然数となること、等である。さて、ここでは上述のことを中心とした解説をしたいので、我々は以後 k を虚と限定し、k の代数的不変量 S_k 及びその周辺の対象の説明から話を始めようと思う。

尚、[Iw], [S-1], [S-2]においては H_{k^+} とは少しく異なった"円単数群" C_{k^+} を用いて

$$h_{k^+} \doteqdot [E_{k^+} : C_{k^+}]$$

なる表示式が得られていることを、ここに付言しておく。

1．L/Kを絶対Abel体の拡大とするとき、制限射$G_L \to G_K$を$\mathbb{Q}$上線型に拡張して$\mathbb{Q}$上の多元環準同型

$$\mathrm{Res}_{L/K}: \mathfrak{G}_L \longrightarrow \mathfrak{G}_K$$

が得られる。これに対し、$\mathbb{Q}$上の線型準同型

$$\mathrm{Cor}_{L/K}: \mathfrak{G}_K \longrightarrow \mathfrak{G}_L$$

は

$$\mathrm{Cor}_{L/K}(\sigma) := \sum_{\substack{s \in G_L \\ s|K = \sigma}} s \qquad (\sigma \in G_K)$$

を$\mathbb{Q}$上線型に拡張したものである。

いま各自然数nに対し、$\mathbb{Q}$上のn分体を$\mathbb{Q}^{(n)}$と書こう。

$$\mathbb{Q}^{(n)} := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}).$$

nと素な整数tを取るとき$\sigma_t^{(n)}$は$e^{2\pi i/n}$を$e^{2\pi i t/n}$に写す$\mathbb{Q}^{(n)}$の体自己同型を表すものとすれば、各整数aに対し$\mathfrak{G}_{\mathbb{Q}^{(n)}}$の元

$$\theta_n(a) := \sum_{\substack{t=1 \\ (t,n)=1}}^{n} \left\langle -\frac{at}{n} \right\rangle \sigma_t^{(n)-1}$$

が定まる。但し$\langle\ \rangle$は少数部分を表す記号で$[\ ]$をGauß記号とすれば

$$\langle r \rangle := r - [r] \qquad (r \in \mathbb{R})$$

である。そして

$$\theta_n(a;k) := \mathrm{Cor}_{k/k\cap\mathbb{Q}^{(n)}} \circ \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}^{(n)}/k\cap\mathbb{Q}^{(n)}}(\theta_n(a))$$

とおけば、これは$\mathfrak{G}_k$の元で、

$$S_k := \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\,\theta_n(a;k)\Big) \cap R_k$$

はR_kのidealとなることが確かめられる。この<u>kのStickelberger</u>

ideal S_kには次の著しい性質がある。

> Stickelbergerの定理([S-2] Th.3.1). R_k は k のideal類群 $C(k)$に自然に作用するが、このとき S_k は $C(k)$を零化する。

さて

$$R_k^- := \left\{ \alpha \in R_k \,\middle|\, (1+J)\alpha = 0 \right\}$$

とすれば、これはA_kの部分加群だから

$$S_k^- := S_k \cap R_k^-$$

とすることにより自然に

$$R_k^-/S_k^- \subset A_k/S_k$$

となり、両者の間には高々指数2の相異しかないことも分る。従って、この意味で(3)式は

(3′) $$h_k^- \doteqdot [R_k^- : S_k^-]$$

と書き直せる。Stickelberger の定理により、特に S_k は k の相対類群 $C(k)^- := \left\{ c \in C(k) \,\middle|\, c^{1+J} = 1 \right\}$も零化するのだが、

$$h_k^- = |C(k)^-|$$

を知るとき、$C(k)^-$の元達の間に成立つ関係式がこの定理によって与えられるもの以外には殆んど無さそうであるということが(3′)式から展望されるのである。

次に(3)もしくは(3′)式の正確な意味を説明するために、もう少し記号を導入しよう。各素数 p に対し $k/\mathbb{Q}$ に関する p の惰性群を T_p で表し、k の導手を m とおくとき

$$t \equiv p \ (\mathrm{mod}.\ m|m|_p), \qquad t \equiv 1 \ (\mathrm{mod}.\ |m|_p^{-1})$$

なる整数tから作った$\sigma_t^{(m)}$はp（とk）のみで決まるから

$$\lambda_p := \mathrm{Res}_{Q^{(m)}/k}(\sigma_t^{(m)}), \qquad \overline{\sigma}_p := \frac{1}{|T_p|}\lambda_p^{-1}\sum_{\tau \in T_p}\tau$$

とおく。そして各自然数nに対し

$$T_n := \prod_{p:\text{素数}|} T_p, \qquad s(T_n) := \sum_{\tau \in T_n}\tau$$

とおく。$p_1, \cdots, p_g$をk/Qで分岐するすべての素数とすると$\overline{m} := p_1 \cdot \cdots \cdot p_g$は$k$のみで決まる数で、$\overline{m}$を割る各自然数$r$に対して

$$U_r := \sum_{r'|r,\, r' \in N} \Big(s(T_{r'}) \prod_{p:\text{素数}|\frac{r}{r'}} (1 - \overline{\sigma}_p) R_k \Big)$$

を作れば、これが解析的類数公式によって、Q上の多元環$\mathfrak{S}_k$の格子になっていることが分る。但し$U_1 := R_k$とし、$U_{\overline{m}}$をU_kと書くことにする。いま$e^- := \frac{1}{2}(1-J)$とすれば、これは$\mathfrak{S}_k$の巾等元で、e^-R_k, e^-U_k等はQ上の多元環$e^-\mathfrak{S}_k$の格子となる。$e^-\mathfrak{S}_k$の格子達A, Bに対し$T(A) = B$なる$e^-\mathfrak{S}_k$のQ上の線型変換Tを取るとき、Tの表現行列の行列式$\det T$は符号を除けばTの取り方に依らずに定まるから

$$(A : B) := |\det T|$$

とおくことにする。

定理（[S-2] Th. 2.1）.

$$[A_k : S_k] = h_k^- \cdot \frac{1}{Q_k} \cdot (e^-R_k : e^-U_k).$$

ここで、Q_kはkの単数指数である。即ちWをkの1の巾根

全体の成す乗法群とするとき

$$Q_k := [E_k : WE_{k^+}].$$

式(3)の意味する所は

$$c_k = \frac{1}{Q_k}(e^-R_k : e^-U_k)$$

が(1)におけるQ_Gの様に“限定的な”値しか取らぬということである。実際Q_kは1か2に等しく、後述するように$(e^-R_k : e^-U_k)$は自然数値を取るのだが、c_kの奇素数因子はkのgenus数$\prod_{i=1}^{g}|T_{p_i}|/[k:Q]$の約数、従って$[k:Q]$及び$h_k$の約数であることが示される。([S-2] Th.5.4のCor., 尚genus数の定義及び基本的性質については、例えば[Is]を参照されたい。)蛇足を言えば

$$(e^-R_k : e^-U_k) \leqslant (3^{\frac{1}{6}(g-1)}\cdot 2^{\frac{1}{4}})^{[k:Q]}.$$

さて我々が(1)同様c_kの、詰まりは$(e^-R_k : e^-U_k)$の具体的な形の求まることを望むのは当然だろう。このことに関して、

<u>命題1</u>. $d_1 := (e^-R_k : e^-U_{p_1})$とし、$g \geqslant 2$での各$i = 2, \cdots, g$に対しては$d_i := (e^-U_{p_1 \cdots\cdots p_{i-1}} : e^-U_{p_1 \cdots\cdots p_i})$とおけば

$$(e^-R_k : e^-U_k) = d_1 \cdot \cdots \cdot d_g.$$

従って$(e^-R_k : e^-U_k)$の計算は、各d_iのそれに帰着される。そして

<u>命題2</u>([K]命題13). 各素数$p|m$に対して、

$$(e^-R_k : e^-U_p) = 1.$$

即ち、d_1 は常に 1 に等しい。

$A \subset \mathfrak{S}_k$, $H \subset G$ に対し

$$A^H := \{\alpha \in A \mid h\cdot\alpha = \alpha\ (\forall h \in H)\}$$

と書くことにすると、

<u>命題3</u>([K]命題10). $g \geqq 2$ のときは、各 $i = 2, \cdots, g$ について、$(e^- U_{p_1\cdot\cdots\cdot p_{i-1}})^{T_{p_i}} \supset (e^- U_{p_1\cdot\cdots\cdot p_i})^{T_{p_i}}$ で

$$d_i = [(e^- U_{p_1\cdot\cdots\cdot p_{i-1}})^{T_{p_i}} : (e^- U_{p_1\cdot\cdots\cdot p_i})^{T_{p_i}}].$$

<u>命題4</u>([K]命題11). 各 $i = 1, \cdots, g$ に対し、$J \in T_{p_i}$ なら

$$d_i = 1.$$

我々は上の四命題を証明するには特別の労力を要しないが、

<u>命題5</u>([K]命題14, 15). $g \geqq 2$ のとき

(i) $J \in T_{p_1} \cup T_{p_2}$ ならば

$$d_2 = 1.$$

(ii) $J \notin T_{p_1 p_2}$ でも

$$d_2 = 1.$$

(iii) $J \in T_{p_1 p_2} \setminus (T_{p_1} \cup T_{p_2})$ では

$$d_2 = 2^{[G : Z_{p_1}\cdot Z_{p_2}]}$$

但し、Z_{p_i} $(i = 1, \cdots, g)$ は p_i の $k/\mathbb{Q}$ での分解群を表すことにするのである。

証明. (i)は命題4による。$J \in T_{p_1}$ の場合は、p_1 と p_2 の役

割を交換して、命題1,2の助けを借りればよい。

(ii)を示そう。$t := |T_{p_1} \cap T_{p_2}|$, $T_{p_1} \cap T_{p_2} = \{ s_1, \cdots, s_t \}$とし

$$u := |T_{p_1}|/t\,, \quad T_{p_1} = \{ s_i \cdot \tau_j \mid i = 1, \cdots t\ ;\ j = 1, \cdots, u \}$$

$$v := |T_{p_2}|/t\,, \quad T_{p_2} = \{ s_i \cdot \rho_\ell \mid i = 1, \cdots, t\ ;\ \ell = 1, \cdots, v \}$$

とおく。但し $s_1 = \tau_1 = \rho_1 = 1$ とする。剰余群 $G/\langle J \rangle T_{p_1 p_2}$の完全代表系を$\sigma_1, \cdots, \sigma_w$とすると

$$e^- R_k = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{u} \sum_{\ell=1}^{v} \sum_{h=1}^{w} \mathbb{Z} e^- s_i \tau_j \rho_\ell \sigma_h \,.$$

$\{1, \cdots, u\}$上の置換ξと$\{1, \cdots, w\}$上の置換ηと、$\varepsilon \in \{-1, 1\}$とを

$$\begin{aligned} &\lambda_{p_1}^{-1} s(T_{p_1}) \sum_{i,j,\ell,h=1}^{t,u,v,w} a_{i,j,\ell,h}\, e^- s_i \tau_j \rho_\ell \sigma_h \\ &\quad = \varepsilon \sum_{i,j,\ell,h=1}^{t,u,v,w} \sum_{q,r=1}^{t,u} a_{q,r,\eta(\ell),\xi(h)}\, e^- s_i \tau_j \rho_\ell \sigma_h \quad (\text{各 } a_{i,j,\ell,h} \in \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

で定めると、

$$e^- U_{p_1} = \left\{ \sum_{i,j,\ell,h=1}^{t,u,v,w} x_{i,j,\ell,h}\, e^- s_i \tau_j \rho_\ell \sigma_h \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{i,j,\ell,h} = a_{i,j,\ell,h} - \dfrac{\varepsilon}{tv} \displaystyle\sum_{q,r=1}^{t,u} a_{q,r,\eta(\ell),\xi(h)} + b_{\ell,h} \\ a_{i,j,\ell,h},\ b_{\ell,h} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, t\ ;\ \ell = 1, \cdots, v \\ j = 1, \cdots, u\ ;\ h = 1, \cdots, w \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

から

$$(e^- U_{p_1})^{T_{p_2}} = \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} x_{j,h}\, e^- s(T_{p_2}) \tau_j \sigma_h \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{j,h} - x_{j',\xi(h)} + \dfrac{\varepsilon}{u} \displaystyle\sum_{r=1}^{u} x_{r,\xi(h)} \in \mathbb{Z} \\ x_{j,h} \in \dfrac{1}{u} \mathbb{Z}\ (j, j' = 1, \cdots, u\ ;\ h = 1, \cdots, w) \end{array} \right\}$$

が計算される。又

$$e^- s(T_{p_1 p_2}) R_k = \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} y_h\, e^- s(T_{p_2}) \tau_j \sigma_h \;\middle|\; y_h \in \mathbb{Z}\ (h = 1, \cdots, w) \right\}$$

$$e^- s(T_{p_2})(1 - \bar{\sigma}_{p_1}) R_k = \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} z_{j,h}\, e^- s(T_{p_2}) \tau_j \sigma_h \;\middle|\; \begin{array}{l} z_{j,h} = a_{j,h} - \dfrac{\varepsilon}{u} \displaystyle\sum_{r=1}^{u} a_{r,\xi(h)} \\ a_{j,h} \in \mathbb{Z}\ (j = 1, \cdots, u\ ;\ h = 1, \cdots, w) \end{array} \right\}$$

から

$$e^- s(T_{p_1 p_2}) R_k + e^- s(T_{p_2})(1 - \bar{\sigma}_{p_1}) R_k$$

$$=\left\{\sum_{j,h=1}^{u,w} x_{j,h}\, e^- s(T_{p_2})\tau_j\sigma_h \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{j,h}-\varepsilon x_{j',\xi(h)}+\dfrac{\varepsilon}{u}\displaystyle\sum_{r=1}^{u} x_{r,\xi(h)}\in\mathbb{Z} \\ x_{j,h}\in\dfrac{1}{u}\mathbb{Z}\ \ (j,j'=1,\cdots,u\,;\ h=1,\cdots,w)\end{array}\right\}$$

が計算される。因って

$$(e^- U_{p_1})^{T_{p_2}} = e^- s(T_{p_1p_2})R_k + e^- s(T_{p_2})(1-\bar{\sigma}_{p_1})R_k \subset (e^- U_{p_1p_2})^{T_{p_2}}.$$

これと命題3を合わせれば、$d_2=1$ を得る。

次に(iii)を示そう。仮定により $2\,|\,[T_{p_1p_2}:T_{p_1}]$, $2\,|\,[T_{p_1p_2}:T_{p_2}]$ だから

$$t:=|T_{p_1}\cap T_{p_2}|,\quad T_{p_1}\cap T_{p_2}=\{s_1,\cdots,s_t\},$$
$$u:=|T_{p_1}|/2t,\quad T_{p_1}=\{s_i\tau_j \mid i=1,\cdots,t\,;\ j=1,\cdots,2u\},$$
$$v:=|T_{p_2}|/2t,\quad T_{p_2}=\{s_i\rho_\ell \mid i=1,\cdots,t\,;\ \ell=1,\cdots,2v\}$$

とおく。但し $s_1=\tau_1=\rho_1=1$ としておく。そして更に、

$$J=\tau_{u+1}\rho_{v+1}\,,\quad \tau_{u+1}{}^2=\rho_{v+1}{}^2=1,$$

$$\tau_{u+1}\tau_j s(T_{p_1}\cap T_{p_2})=\tau_{j+u}s(T_{p_1}\cap T_{p_2}),\ \ \rho_{v+1}\rho_\ell s(T_{p_1}\cap T_{p_2})=\rho_{v+\ell}s(T_{p_1}\cap T_{p_2})$$

としてよいことに注意する。$(j=1,\cdots,u\,;\ \ell=1,\cdots,v)$ $\{1,\cdots,m\}$上の置換ξと$\{1,\cdots,r\}$上の置換ηと$\varepsilon_{\ell,h}\in\{-1,1\}\begin{pmatrix}\ell=1,\cdots,v\,;\\ h=1,\cdots,w\end{pmatrix}$とを

$$\lambda_{p_1}^{-1}e^- s(T_{p_1})\rho_\ell\sigma_h=\varepsilon_{\xi^{-1}(\ell),\eta^{-1}(h)}\,e^- s(T_{p_1})\rho_{\xi^{-1}(\ell)}\sigma_{\eta^{-1}(h)}\quad(\ell=1,\cdots,v\,;\ h=1,\cdots,w)$$

によって定めれば

$$(4)\quad (e^- U_{p_1})^{T_{p_2}}=\left\{\sum_{j,h=1}^{u,w} x_{j,h}\,e^- s(T_{p_2})\tau_j\sigma_h \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{j,h}\in\dfrac{1}{2}\mathbb{Z},\ x_{j,h}-x_{j',h}\in\mathbb{Z}, \\ x_{j,h}-x_{j',\eta(h)}\in\mathbb{Z}\begin{pmatrix} j,j'=1,\cdots,u\\ h=1,\cdots,w\end{pmatrix}\end{array}\right\}.$$

更に$\{1,\cdots,u\}$上の置換ξ', $\{1,\cdots,w\}$上の置換η', $\varepsilon'_{j,h}\in\{-1,1\}\begin{pmatrix}j=1,\cdots,u\\ h=1,\cdots,w\end{pmatrix}$

を

$$\lambda_{p_2}^{-1}e^- s(T_{p_2})\tau_j\sigma_h=\varepsilon'_{\xi'^{-1}(j),\eta'^{-1}(h)}\,e^- s(T_{p_2})\tau_{\xi'^{-1}(j)}\sigma_{\eta'^{-1}(h)}\ \ (j=1,\cdots,u\,;\ h=1,\cdots,w)$$

で定めれば

$$(5)\quad (e^{-}U_{p_1p_2})^{T_{p_2}} = \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} (y_{j,h} + z_{j,h}) e^{-} s(T_{p_2}) \tau_j \sigma_h \;\middle|\; \begin{array}{l} y_{j,h} \in \mathbb{Z},\ z_{j,h} = x_{j,h} - \varepsilon'_{j,h} x_{\xi(j)\eta'(h)} \\ x_{j,h} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},\ x_{j,h} - x_{j',h} \in \mathbb{Z} \\ x_{j,h} - x_{j',\eta(h)} \in \mathbb{Z} \left(\begin{array}{l} j, j' = 1, \cdots, u \\ h = 1, \cdots, w \end{array} \right) \end{array} \right\}.$$

(4)より、加群として

$$(6)\qquad (e^{-}U_{p_1})^{T_{p_2}} / e^{-} s(T_{p_2}) R_k \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{w'}.$$

ここでw'は$\langle\eta\rangle$の作用空間$\{1, \cdots, w\}$でのη－軌道の総数。λ_{p_1}とλ_{p_2}との可換性からη'は$\{1, \cdots, w\}$のη－軌道達$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{w'}\}$の置換を引起すことが分る。$f$を$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{w'}\}$での$\eta'$－軌道の総数とすれば、(5)より

$$(e^{-}U_{p_1p_2})^{T_{p_2}} / e^{-} s(T_{p_2}) R_k \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{w'-f}.$$

従って、(6)とこの式とから

$$(7)\qquad (e^{-}U_{p_1})^{T_{p_2}} / (e^{-}U_{p_1p_2})^{T_{p_2}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{f}.$$

他方、fは$\{1, \cdots, w\}$の$\langle\eta, \eta'\rangle$－軌道の総数だから

$$f = [G : \langle T_{p_1p_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} \rangle] = [G : Z_{p_1} Z_{p_2}].$$

これと(7)と、命題3とから求める結果が得られる。(証明終り)

2．さて我々はここで既に$g \geq 3$の場合のd_3の一般的な計算の困難に突き当るのである。ただd_3が任意の自然数値を取り得るようなことは示し得て、c_kについては次が分る。

<u>命題6</u>．一般に$c_k \in \frac{1}{2}N$で

1)　$g = 1$ならば、

$$c_k = 1.$$

2) $g=2$ ならば、c_k は $\frac{1}{2}$ か 1 もしくは 2 に等しく、各場合が無限の k によって実現される。

3) $g=3$ ならば、$c_k \in \{2^a \mid -1 \leqq a \in \mathbb{Z}\}$ で、各 $a \in \mathbb{Z}, \geqq -1$ に対して

$$\#\{K : \text{虚の絶対Abel体} \mid c_K = 2^a,\ g(K) = 3\} = \infty.$$

4) 4以上の各自然数 n、各 $\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ に対して

$$\#\{K : \text{虚の絶対Abel体} \mid c_K = \nu,\ g(K) = n\} = \infty$$

1)は命題2と $g=1$ のときの $Q_k=1$ とから。2)は $c_k = d_2/Q_k$ に対して、命題5による $d_2 = 1, 2$ と、$Q_k = 1, 2$ の組合せから出る d_2/Q_k の値がすべて c_k によって取られ得ることを言っている。3)以降には、[S-2] Th. 5.2 が有効である。3)の後半及び4)は、d_3 が命題5の計算方法に乗り易い k をもって示す。特に4)では、都合よくこのような k で、$d_4 = \cdots = d_g = 1$ なるものが取れるのだが、その場合Cebotarevの密度定理にまつわるGalois体での素idealの分解等に関する陳腐な議論を積み重ねなくてはならない。

3．特殊な形をした k に対しては、c_k の値が明確に計算される場合がある。次にそれをいくつか挙げることにする。

以後の便宜のためだけに、次の2条件

(イ). $G = T_{p_1} \times \cdots \times T_{p_g}$

(ロ). J の各 T_{p_i} ($i=1,\cdots,g$) への射影は1でない

を満す k を<u>円分型</u>と呼ぶ。その典型例は $\mathbb{Q}$ 上の円分体である。

<u>命題7</u>. k が円分型なら

$$[R_k^- : S_k^-] = [A_k : S_k] = 2^a \cdot h_k^- .$$

ここに、$g=1$ のときは a は0を表し、$g \geqq 2$ では

$$a := 2^{g-2} - 1 .$$

この証明は主に、[S-1]における k が円分体の場合の cohomology の計算によるものが、いまもそのまま通用することによる。

k が(イ)の条件だけ満すときにも c_k が2巾となることは分り、

<u>命題8</u>. k が条件(イ)を満し、k/k^+ で分岐する素点があり、それらはすべて同一の素数上にあるならば、c_k は1、即ち

$$[A_k : S_k] = h_k^- .$$

命題8の第二の条件は $J \in T_{p_i}$ ($\exists ! i = 1,\cdots,g$) を意味するもので、(ロ)とは正反対の条件である。更に上の2つの事実に対し、

<u>例</u>. $g=3$, $G = T_{p_1} \times T_{p_2} \times T_{p_3}$ で、簡単のため $[k:\mathbb{Q}]$ は2巾とし、J の T_{p_1}, T_{p_2} への射影は1でなく、T_{p_3} へのそれは1であるとすると

$$c_k = \frac{1}{Q_k} 2^{[G : Z_{p_1} \cdot Z_{p_2}] + d}$$

ここに

$$d = \begin{cases} 0 & (T_{p_1} \cdot Z_{p_2} = Z_{p_1} \cdot T_{p_2} = T_{p_1 p_2} \text{ のとき}) \\ 1 & (|T_{p_1} \cdot Z_{p_2}| \neq |Z_{p_1} \cdot T_{p_2}| \text{ のとき}) \\ 2 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

この例から命題5の3)の後半を導き出せるのである。

> <u>命題9</u>．([S-2] Th.5.3 及び [H] Satz 24) $k/\mathbb{Q}$ が巡回拡大なら
> $$[A_k : S_k] = h_k^- .$$

Gの群構造のみに条件をつけて $c_k = 1$ を結論するものではこの命題が最終形である。実際我々は次を示すことが出来る。

> <u>命題10</u>．ℓ を素数、Dをその ℓ-Sylow部分群が非巡回なる偶数位数の有限Abel群とするとき、虚の絶対Abel体Kで
> $$G_K \cong D, \qquad \ell \mid c_K$$
> を満すものが無数にある。

もう一つ命題を述べておこう。

> <u>命題11</u>．総ての $i = 1, \cdots, g$ に対して $J \in Z_{p_i}$ ならば、
> $$c_k = \frac{1}{Q_k} 2^a .$$
> ここに a は $0 \leq a \leq \sum_{i=1}^{g} [G : Z_{p_i}] + 1$ なる整数である。

これは[Ii]の Prop.2.1 から導かれる事実であるが、Prop.2.1 の証明中の議論は各 $i = 1, \cdots, g$ に対して

$$J \in Z_{p_i} \implies d_i \mid 2^{[G : Z_{p_i}]}$$

を示唆している。だから $d_i \mid |T_{p_i}|^{[G : T_{p_i}]}$ を知れば、$J \in Z_{p_i}$, $2 \nmid |T_{p_i}|$ とすることにより命題5の4)の証明での $d_i = 1$ が工夫できるのである。

4．k' を、k を含む絶対Abel体とする。

$$R_k^- = e^- R_k$$

で、$R_{k'}^-$ に関しても同様なことが言え、然も

$$\mathrm{Res}_{k'/k}(R_{k'}) = R_k, \qquad \mathrm{Res}_{k'/k}(S_{k'}^-) \subset S_k^-$$

となることに注意すれば、次を得る。

<u>補題</u>. $\mathrm{Res}_{k'/k}$ は加群の全射準同型

$$R_{k'}^-/S_{k'}^- \longrightarrow R_k^-/S_k^-$$

を導く。従って

$$[R_k^- : S_k^-] \,\big|\, [R_{k'}^- : S_{k'}^-].$$

この補題を使えば、命題6,7から例えば次の様なことは導けるだろう。

<u>命題12</u>. 勝手な自然数Nと、4以上の勝手な自然数nとに対して、円分型の絶対Abel体Kで

$$N \,|\, h_K^-, \qquad g(K) = n$$

を満すものが無数に存在する。

証明. 命題7により

$$g(k) = n, \quad [A_k : S_k] = 2^{2^n} \cdot N \cdot h_k^-$$

となるようなkは無数に存在することが分る。

又、各kに対し円分型の体Kで、$K \supset k$, $g(K) = g(k)$なるものが必ず取れる。このとき補題と命題7とから

$$N \cdot h_k^- \,|\, h_K^-$$

が出る。従ってKは正に求めるものである。（証明終り）

先の定義の条件(イ)はkの genus 数が1に等しいことと同値である。従って命題12から、Kに対する genus 理論によらずに、且Kにおいて過度な数の素数を分岐させることなしに(詰まり条件$g(K)=n$の下で)h_KのNによる可除性を主張することが出来る。(その場合実は$n \geqq 2$で十分)更に補題を念頭に置けば、先程のk'とkが共に円分型で、$g(k')=g(k)$の場合命題7から、$h_k^- | h_{k'}^-$となることは見易い。又、然るべき条件下、例えば$2 \nmid [k':k]$では$[A_k:S_k] \,|\, [A_{k'}:S_{k'}]$も成立つことから、$k'/\mathbb{Q}$が(従って$k/\mathbb{Q}$も)巡回拡大のとき、命題9から矢張り、$h_k^- | h_{k'}^-$が言える。然しこれらは[H]Satz41から、又必要なら genus 理論の援用により直ちに結論されることでもある。補題から Satz41 程度の結果(h_k^-の奇数部分)$| h_{k'}^-$が導き出せる位の近似性(例えばc_kが常に2巾)を(3)に期待したのは我々だけであったろうか。むしろ命題6から命題12のような事実が導かれたのは皮肉である。

思うに我々の将来の興味は補題の準同型写像の核に向けられるべきであろう。そして代数的表示式(3)の成立は、それの一般代数体への拡張を考えるとき「例えばCM型の絶対Galois体において Stickelberger ideal に相当するものは何か。」という問題の重要性に対する一つの根拠を与えていると思われる。

最後に、本文中に引用した文献を以下に挙げて筆を置くことにする。

[H] H. Hasse : Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie-Verlag Berlin, 1952.

[Ii] 飯村清明 : A note on the Stickelberger ideal of conductor level, Arch. Math, 36 (1981).

[Is] 石田信 : The genus fields of algebraic number fields, Lecture Notes in Math. 555, Springer, Berlin-Heiderberg-New York, 1976.

[Iw] 岩沢健吉 : A class number formula for cyclotomic fields, Ann. of Math, 76 (1962).

[K] 木村達雄 : 円分体の整数論, 代数的整数論研究会記録, 1978, 12/7～9 於九州大学理学部.

[L] H. W. Leopoldt : Über Einheitengruppe und Klassenzahl reller abelscher Zahlkörper, Abh. Deutsh. Akad. Wiss. Berlin math.-nat Klasse 1953 No. 2 (1954).

[S-1] W. Sinnott : On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic number field, Ann. of Math, 108 (1978).

[S-2] W. Sinnott : On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field, Inventiones math, 62 (1980).